BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 ***Fiziкa-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2007***

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

К.К.ГАСАНОВ, Л.К.ГАСАНОВА

Бакинский Государственный Университет

В работе при помощи матричного решения сопряженной системы получено интегральное представление решения линейных систем уравнений в частных производных первого порядка. Далее вводится понятие управляемости и доказывается, что для управляемости необходимым и достаточным условием является невырожденность некоторой матрицы.

При исследовании ряда химико-технологических процессов возникает задача оптимального управления [1, 4, 5] для линейной системы уравнений

$$\begin{aligned} x_t &= A_{11}(t,s)x + A_{12}(t,s)y + B_1(t,s)u, \\ y_s &= A_{21}(t,s)x + A_{22}(t,s)y + B_2(t,s)v, \quad (t,s)\in D \end{aligned} \tag{1}$$

с условиями

$$\begin{aligned} x(0,s) &= \varphi_1(s), \quad s\in[0,s], \\ y(t,0) &= \varphi_2(t), \quad t\in[0,T], \end{aligned} \tag{2}$$

где $A_{ij} - (n_i \times n_j) -$ матрица, $B_i - (n_i\times m_i) -$ матрица, $\varphi_i - n_i -$ мерный вектор, $(u,v) - m_1+m_2 -$ мерное управление, $D=(0,T)\times(0,S)$.

В дальнейшем, в качестве допустимых управлений $(u(t,s),v(t,s))$ будем рассматривать функции из пространства $L_{m_1+m_2}(D)$.

Пусть выполняются условия:

1) Элементы матриц $A_{ij}(t,s)$ и $B_i(t,s)$ измеримы и нормы $\|A_{ij}(t,s)\|\in L_\infty(D)$, $\|B_i(t,s)\|\in L_\infty(D)$;
2) Элементы векторов $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(t)$ измеримы, нормы $\|\varphi_1(s)\|\in L(0,S)$, $\|\varphi_2(t)\|\in L(0,T)$.

Можно доказать, что при выполнении этих условий существует единственное решение $(x(t,s),y(t,s))\in L_{n_1+n_2}(D)$ системы интегральных уравнений

$$
\begin{aligned}
x(t,s) &= \varphi_1(s)+\int_0^t \left[A_{11}(\tau,s)x(\tau,s)+A_{12}(\tau,s)y(\tau,s)+B_1(\tau,s)u(\tau,s)\right]d\tau,\\
y(t,s) &= \varphi_2(t)+\int_0^s \left[A_{21}(t,\sigma)x(t,\sigma)+A_{22}(t,\sigma)y(t,\sigma)+B_2(t,\sigma)v(t,\sigma)\right]d\sigma.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Пусть $\Phi_{ij}(t,s;\tau,\sigma)-(n_i\times n_j)-$ матрица, которая определяется как решение при $0\le\tau\le t\le T$, $0\le\sigma\le s\le S$ сопряженной системы

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi_{i1}}{\partial\tau}+\Phi_{i1}A_{11}+\Phi_{i1}A_{21}=0,\\
&\frac{\partial\Phi_{i2}}{\partial\sigma}+\Phi_{i1}A_{12}+\Phi_{i2}A_{22}=0,\quad i=1,2,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

удовлетворяющее условиям

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{11}(t,s;t,\sigma)=I,\ \Phi_{21}(t,s;t,\sigma)=0,\\
&\Phi_{12}(t,s;\tau,s)=0,\ \Phi_{22}(t,s;\tau,s)=I,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $I-$ единичная матрица, $0-$ нулевая матрица.

Тогда, для решения $(x(t,s),y(t,s))$ задачи (1), (2) при заданном управлении $(u(t,s),v(t,s))$ имеет место соотношения:

$$
\begin{aligned}
\int_0^s x(t,\sigma)d\sigma &= \int_0^s \Phi_{11}(t,s;0,\sigma)\varphi_1(\sigma)d\sigma+\int_0^t \Phi_{12}(t,s;\tau,0)\varphi_2(\tau)d\tau+\\
&+\int_0^t\int_0^s\{\Phi_{11}(t,s;\tau,\sigma)B_1(\tau,\sigma)u(\tau,\sigma)+\Phi_{12}(t,s;\tau,\sigma)B_2(\tau,\sigma)v(\tau,\sigma)\}d\sigma\, d\tau,\\
\int_0^t y(\tau,s)d\tau &= \int_0^s \Phi_{21}(t,s;0,\sigma)\varphi_1(\sigma)d\sigma+\int_0^t \Phi_{22}(t,s;\tau,0)\varphi_2(\tau)d\tau+\\
&+\int_0^t\int_0^s\{\Phi_{21}(t,s;\tau,\sigma)B_1(\tau,\sigma)u(\tau,\sigma)+\Phi_{22}(t,s;\tau,\sigma)B_2(\tau,\sigma)v(\tau,\sigma)\}d\sigma\, d\tau.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Если для каждого начального состояния (2) можно указать управление $(u(t,s),v(t,s))$, для которого соответствующее решение $(x(t,s),y(t,s))$ задачи (1), (2), удовлетворяющее условиям

$$
\int_0^S x(T,s)ds=a_1,\ \int_0^T y(t,S)dt=a_2,
\tag{7}
$$

то будем говорить, что система (1) в области D управляема, где $(a_1,a_2)-$ $(n_1+n_2)-$ мерный заданный вектор.

Положим:

$$b_i = a_i - \int_0^S \Phi_{i1}(T,S;0,s)\varphi_1(s)ds - \int_0^T \Phi_{i2}(T,S;t,0)\varphi_2(t)dt;$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= \iint_D \{\Phi_{11}(T,S;t,s)B_1(t,s)B_1^T(t,s)\Phi_{11}^T(T,S;t,s)+ \\ &\quad +\Phi_{12}(T,S;t,s)B_2(t,s)B_2^T(t,s)\Phi_{12}^T(T,S;t,s)\}dsdt, \\ c_{12} &= \iint_D \{\Phi_{11}(T,S;t,s)B_1(t,s)B_1^T(t,s)\Phi_{21}^T(T,S;t,s)+ \\ &\quad +\Phi_{12}(T,S;t,s)B_2(t,s)B_2^T(t,s)\Phi_{22}^T(T,S;t,s)\}dsdt, \\ c_{21} &= \iint_D \{\Phi_{21}(T,S;t,s)B_1(t,s)B_1^T(t,s)\Phi_{11}^T(T,S;t,s)+ \\ &\quad +\Phi_{22}(T,S;t,s)B_2(t,s)B_2^T(t,s)\Phi_{12}^T(T,S;t,s)\}dsdt, \\ c_{22} &= \iint_D \{\Phi_{21}(T,S;t,s)B_1(t,s)B_1^T(t,s)\Phi_{21}^T(T,S;t,s)+ \\ &\quad +\Phi_{22}(T,S;t,s)B_2(t,s)B_2^T(t,s)\Phi_{22}^T(T,S;t,s)\}dsdt, \end{aligned} \tag{8}$$

где Φ^T – означает транспонирование, $c_{ij} - (n_i \times n_j)$ – матрица, $c_{12}^T = c_{21}$.

Теорема. Система (1) управляема тогда и только тогда, когда $(n_1 + n_2 \times n_1 + n_2)$ - матрица

$$M = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \tag{9}$$

невырождена.

Для доказательства достаточности предположим, что матрица M невырождена и заданы начальные условия (2) и $n_1 + n_2$ – мерный вектор (a_1, a_2). Найдем такое управление $(u(t,s), v(t,s))$, для которого соответствующее ему решение $(x(t,s), y(t,s))$ удовлетворяет условиям (7). Для заданного начального состояния (2) и вектора (a_1, a_2) положим

$$\begin{aligned} u(t,s) &= B_1^T(t,s)\Phi_{11}^T(T,S;t,s)\xi + B_1^T(t,s)\Phi_{21}^T(T,S;t,s)\eta, \\ v(t,s) &= B_2^T(t,s)\Phi_{12}^T(T,S;t,s)\xi + B_2^T(t,s)\Phi_{22}^T(T,S;t,s)\eta, \end{aligned} \tag{10}$$

где $(\xi,\eta) - (n_1 + n_2)$ – мерный вектор, который определяется формулой

$$(\xi,\eta)^T = M^{-1}(b_1, b_2)^T. \tag{11}$$

Пусть $(x(t,s), y(t,s))$ - решение системы (1), (2) при управлении, определенном с помощью (10), (11).

Тогда, в силу (6), (7), (8), (9), имеем:

$$\left(\int_0^S x(T,s)ds, \int_0^T y(t,S)dt\right)^T = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)^T + M(\xi,\eta)^T.$$

Отсюда, учитывая (11), получаем

$$\int_0^S x(T,s)ds = a_1, \ \int_0^T y(t,S)dt = a_2.$$

Следовательно, система управляема.

Для доказательства необходимости предположим, что система (1) обладает свойством управляемости. Докажем, что матрица M – невырождена.

Отметим, что $M^T = M$ и для любого $n_1 + n_2$ –мерного вектора (ξ,η) имеем

$$(\xi,\eta)M(\xi,\eta)^T = \iint_D \Big\{\left\|\xi^T \Phi_{11}(T,S;t,s)B_1(t,s) + \eta^T \Phi_{21}(T,S;t,s)B_1(t,s)\right\|^2 +$$

$$+\left\|\xi^T \Phi_{12}(T,S;t,s)B_2(t,s) + \eta^T \Phi_{22}(T,S;t,s)B_2(t,s)\right\|^2\Big\} dsd\tau. \qquad (12)$$

Следовательно, матрица M симметрична и неотрицательно определена. Если матрица M вырождена, то существует ненулевой постоянный $n_1 + n_2$ – мерный вектор (ξ^*,η^*) такой, что

$$(\xi^*,\eta^*)M(\xi^*,\eta^*)^T = \iint_D \Big\{\left\|\xi^{*T} \Phi_{11}(T,S;t,s)B_1(t,s) + \eta^{*T} \Phi_{21}(T,S;t,s)B_1(t,s)\right\|^2 +$$

$$+\left\|\xi^{*T} \Phi_{12}(T,S;t,s)B_2(t,s) + \eta^{*T} \Phi_{22}(T,S;t,s)B_2(t,s)\right\|^2\Big\} dtds = 0.$$

Отсюда следует, что для п.в. $(t,s) \in D$:

$$\begin{aligned} &\xi^{*T} \Phi_{11}(T,S;t,s)B_1(t,s) + \eta^{*T} \Phi_{21}(T,S;t,s)B_1(t,s) = 0, \\ &\xi^{*T} \Phi_{12}(T,S;t,s)B_2(t,s) + \eta^{*T} \Phi_{22}(T,S;t,s)B_2(t,s) = 0. \end{aligned} \qquad (13)$$

Поскольку система (1) обладает свойством управляемости, то существует управление $(u^*(t,s), v^*(t,s))$ такое, что соответствующее ему решение $(x^*(t,s), y^*(t,s))$ системы (1) удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} &x^*(0,s) = 0, \ y^*(t,0) = 0, \\ &\int_0^S x^*(T,s)ds = \xi^*, \ \int_0^T y^*(t,S)dt = \eta^*. \end{aligned}$$

При этом из (6) получаем:

$$\xi^{*}=\iint_{D}\left\{\Phi_{11}(T,S;t,s)B_{1}(t,s)u^{*}(t,s)+\Phi_{12}(T,S;t,s)B_{2}(t,s)v^{*}(t,s)\right\}dtds,$$

$$\eta^{*}=\iint_{D}\left\{\Phi_{21}(T,S;t,s)B_{1}(t,s)u^{*}(t,s)+\Phi_{22}(T,S;t,s)B_{2}(t,s)v^{*}(t,s)\right\}dtds.$$

Поскольку (ξ^{*},η^{*})– ненулевой вектор, то имеем:

$$\begin{aligned}(\xi^{*},\eta^{*})(\xi^{*},\eta^{*})^{T} &= \\ &=\iint_{D}\left\{\left[\xi^{*T}\Phi_{11}(T,S;t,s)B_{1}(t,s)+\eta^{*T}\Phi_{21}(T,S;t,s)B_{1}(t,s)\right]u^{*}(t,s)+\right.\\ &\left.+\left[\xi^{*T}\Phi_{12}(T,S;t,s)B_{2}(t,s)+\eta^{*T}\Phi_{22}(T,S;t,s)B_{2}(t,s)\right]v^{*}(t,s)\right\}dtds.\end{aligned}$$

Отсюда, согласно соотношениям (13), получаем противоречие. Это противоречие показывает, что матрица M невырождена. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.; «Наука», 1981, 400с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальности процессов. М.; «Наука», 1971, 508 с.
3. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.; «Наука», 1972, 574 с.
4. Маркин Е.А., Стреколовский А.С. О существовании, единственности и устойчивости решения для одного класса динамических систем, описывающих химические процессы. Вестник Московского Ун-та, серия вычислительной математики и кибернетики, 1977, №4, с. 3-11.
5. Островский Г.М., Волин Ю.М. Моделирование сложных химико-технологических схем. М.; Химия, 1975.

BİRTƏRTİBLİ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ XƏTTİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN İDARƏ OLUNMASI

K.Q.HƏSƏNOV, L.K.HƏSƏNOVA

XÜLASƏ

İşdə qoşma məsələnin matris həllinin köməyilə birtərtibli xüsusi törəməli xətti tənliклər sisteminin həlli üçün inteqral göstərişi alınır. Sonra idarəolunma anlayışı verilir və sistemin idarə olunması müəyyən bir matrisin cırlaşmayan olması zəruri və кafi şərt кimi isbat olunur.

ON A CONTROLLABILITY OF THE LIEAR CONTROL SYSTEMS OF THE FIRST ORDER PARTIAL DIFERENTIAL EQUATIONS

K.Q.HASANOV, L.K.HASANOVA

SUMMARY

In the paper an integral representation of the solution of the first order linear partial differential equation is obtained by the help of matrix solution of the adjoin system.

Futher the definition of controllability is introduced and is proved that for the controllability it is necessary and sufficient the regularity of some matrix.